**Title**: Wave motion in elastic enriched medias based on the second strain gradient formulation

**Titre**: Le mouvement des vagues dans des médias enrichis élastiques basé sur la formulation de gradient de deuxième souche

**Abstract**: In this work, the Second Strain Gradient (SSG) theory proposed by Mindlin is used within a Wave Finite Element Method (WFEM) framework for dynamic analysis of enriched medias. Strong forms of continuum models including governing equations and boundary conditions for one-dimensional (1D) micro-sized Euler-Bernoulli bending beam and torsion bar are derived respectively by using Hamilton’s principle. New ”non-local” Lattice Spring Models (LSM) are expounded, giving unified description of the SSG models for bending and torsion. Weak forms for bending and torsion are established based on SSG theory. WFEM is used to formulate wave propagation characteristics of 1D periodic structures.

A two-dimensional (2D) micro-sized beam grid, which is restricted to out-of plane vibration, is introduced through SSG theory. The strong formulas of continuum model are derived. A valuable long-range LSM formed by interactions of nearest, next-nearest and next-next-nearest neighbors is elaborated. Weak formulas are established within the framework of SSG theory and the global dynamic stiffness matrix of a unit cell is assembled. The band structure and slowness surfaces, confined to the irreducible first Brillouin zone, are studied in frequency spectrum under WFEM. In addition, the energy flow vector fields and wave beaming effects are analyzed by SSG and Classical Theory (CT) of continuum mechanics.

The dynamical behaviors of a three-dimensional (3D) micro-sized slender beam are investigated. The constitutive relations of 3D micro-sized model are introduced within the SSG theory framework and the weak formulations including element stiffness, mass matrices and force vector are calculated. Free wave propagation characteristics are expressed by solving eigenvalue problems through the direct WFEM. Diffusion matrix for a simple coupling condition and a complex coupling condition are confirmed. Wave dispersion, diffusion including reflection and transmission are introduced.

The wave propagation characteristics in a micro-sized 2D full plate are predicted under SSG theory. An eigenvalue solving approach called Contour Integral (CI) method is applied to illustrate the Nonlinear Eigenvalue Problem (NEP) and to conform the band structure and iso-frequency contours. A Sensitivity Analysis (SA) is introduced to investigate the effects of higher order parameters on the dispersion relation.

**Résumé**: Dans ce travail, la théorie du Second Strain Gradient (SSG) proposée par Mindlin est utilisée dans le cadre de la Wave Finite Element Method (WFEM) pour l'analyse dynamique de médias enrichis. Des formes fortes de modèles de continuum comprenant des équations gouvernantes et des conditions aux limites pour la unidimensionnelle (1D) de taille micro poutre de flexion Euler-Bernoulli et la barre de torsion sont dérivées respectivement en utilisant le principe de Hamilton. Un nouveau Lattice Spring Model (LSM) est présenté, donnant une description unifiée des modèles SSG pour la flexion et la torsion. Les formes faibles pour la flexion et la torsion sont établies sur la base de la théorie SSG. WFEM est utilisé pour formuler les caractéristiques de dispersion des ondes des structures périodiques 1D.

Une grille de faisceau bidimensionnelle (2D) de taille micro qui est limitée aux vibrations hors du plan est introduite par la théorie SSG. Les formules fortes du modèle continu sont dérivées. Un LSM à longue portée précieux formé par les interactions des voisins les plus proches, les plus proches et les plus proches est élaboré. Des formules faibles sont établies dans le cadre de la théorie SSG et la matrice de rigidité dynamique globale d'une maille élémentaire est assemblée. La structure de bande et les surfaces de lenteur, confinées à la première zone irréductible de Brillouin, sont étudiées en spectre de fréquence sous WFEM. De plus, les champs de vecteurs de flux d'énergie et les effets de faisceau d'ondes sont analysés par SSG et CT.

Les comportements dynamiques d'une poutre élancée tridimensionnelle (3D) de taille micro sont étudiés. Les relations constitutives du modèle 3D micro-taille sont introduites dans le cadre de la théorie SSG et les formulations faibles comprenant la rigidité des éléments, les matrices de masse et le vecteur de force sont calculées. Les caractéristiques de propagation des ondes libres sont exprimées en résolvant des problèmes de valeurs propres via le WFEM direct. La matrice de diffusion pour une condition de couplage simple et une condition de couplage complexe sont confirmées. La dispersion des ondes, la diffusion incluant la réflexion et la transmission sont introduites.

Les caractéristiques de propagation des ondes dans une plaque pleine 2D de taille microscopique sont prédites selon la théorie SSG. Une approche de résolution des valeurs propres appelée méthode Contour Integral (CI) est appliquée pour illustrer le problème des Nonlinear Eigenvalue Problem (NEP) et pour conformer la structure de la bande et les contours iso-fréquences. Une Sensitivity Analysis (SA) est introduite pour étudier les effets des paramètres d'ordre supérieur sur la relation de dispersion.

**Keywords**: Micro-sized periodic structures; Second strain gradient theory; Wave finite element method; Wave propagation; Reflection and transmission

**Mots-clés**: Structures périodiques microscopiques; Second strain gradient theory; Wave finite element method; Propagation des ondes; Réflexion et transmission