

# Nonlinear inertial waves focusing in rotating flows

## Abstract

We investigate the propagation of inertial waves generated by the oscillation of an axisymmetric torus in a rotating fluid. These inertial waves propagate from the oscillating torus with a propagation angle  $\theta_f$ , determined by the dispersion relation. They focus to a focal region where nonlinear interactions may induce turbulence. Our study employs direct numerical simulations to model this flow, considering both linear and nonlinear regimes, and using two torus forcing configurations. The first model simplifies the torus as a local volume force using a Dirac delta function (Dirac ring) along the torus's oscillation direction in the momentum conservation equations. The second, more realistic model implements a 3D torus using the penalization method. Our findings reveal the emergence of a central vortex as a result of the nonlinear interactions of the propagated inertial waves. In the case of the Dirac ring and the linear regime, our results demonstrate a relationship between vertical kinetic energy and propagation angle at the focal point, with maximum energy occurring at  $\theta_f = 35^\circ$ . Similarly, in the 3D torus forcing scenario, both linear and nonlinear simulations indicate an optimal angle of  $\theta_f = 30^\circ$ , leading to maximum vertical velocity and dissipation, signifying efficient energy transfer from the oscillating source to the focal region. In the nonlinear regime, we show the detailed spectral distribution of kinetic energy within the focal zone and conduct spatio-temporal analysis of the velocity field. This analysis identifies triadic resonances of the inertial waves, which drive the generation of a turbulent patch and a large-scale mode similar to the geostrophic mean flow.

Keywords : Turbulence, rotating, inertial waves, wave turbulence interaction, energy transfer, triadic interactions.

# Focalisation d'ondes inertielles dans des écoulements en rotation

## Résumé

Nous étudions la propagation des ondes inertielles générées par l'oscillation d'un tore axisymétrique dans un fluide en rotation. Ces ondes inertielles se propagent à partir du tore oscillant avec un angle de propagation  $\theta_f$ , déterminé par la relation de dispersion. Elles convergent vers une région focale où des interactions non linéaires peuvent induire une turbulence. Notre étude utilise des simulations numériques directes pour modéliser cet écoulement, en tenant compte des régimes linéaires et non linéaires, et en utilisant deux configurations de forçage du tore. Le premier modèle simplifie le tore en tant que force volumique locale en utilisant une fonction delta de Dirac (anneau de Dirac) le long de la direction d'oscillation du tore dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. Le deuxième modèle, plus réaliste, met en œuvre un tore en 3D en utilisant la méthode de pénalisation. Nos résultats révèlent l'émergence d'un vortex central résultant des interactions non linéaires des ondes inertielles propagées. Dans le cas de l'anneau de Dirac et du régime linéaire, nos résultats montrent une relation entre l'énergie cinétique verticale et l'angle de propagation au point focal, avec une énergie maximale se produisant à  $\theta_f = 35^\circ$ . De même, dans le scénario de forçage en 3D du tore, aussi bien dans les simulations linéaires que non linéaires, indiquent un angle optimal de  $\theta_f = 30^\circ$ , conduisant à une vitesse verticale maximale et à une dissipation maximale, signifiant un transfert efficace d'énergie de la source oscillante vers la région focale. Dans le régime non linéaire, nous présentons la distribution spectrale détaillée de l'énergie cinétique dans la zone focale et effectuons une analyse spatio-temporelle du champ de vitesse. Cette analyse identifie les résonances triadiques des ondes inertielles, qui génèrent une zone turbulente et un mode à grande échelle similaire à l'écoulement moyen géostrophique.

**Mots-clés:** Turbulence, rotation, ondes inertielles, interaction entre les ondes et la turbulence, transfert d'énergie, interactions triadiques.