***Conception et analyse d’estimateurs d’état résilients pour les systèmes linéaires en temps discret***

par **Alexandre Kircher**

**Résumé :**

Du fait de la place des représentations d'état dans les méthodes liées au contrôle des systèmes, il est important de connaître à tout instant l'état d’un système. Cependant, cet état n'est pas toujours mesurable directement par le biais de capteurs. Le problème de l'estimation d'état consiste à reconstruire l'état du système à partir d'un modèle du système et de données mesurables dans le système, et ce sans connaître la valeur exacte des perturbations pouvant exister dans le système.

Le but de cette thèse est de développer et d'analyser des estimateurs pouvant reconstruire l'état d'un système malgré la présence de bruits impulsifs. Les bruits impulsifs sont des perturbations dont la caractéristique principale est d'être égales à zéro la plupart du temps, mais avec valeurs non nulles potentiellement arbitrairement grandes.

Pour parvenir à ce but, nous étudierons la propriété de résilience des estimateurs, c'est-à-dire la capacité à produire une erreur d'estimation insensible à la présence d'une classe de perturbations donnée. Nous aborderons aussi la résilience approchée d'un estimateur, qui caractérise le cas où une classe de perturbations, bien qu’à valeurs potentiellement non bornées, a un impact borné sur les performances de l'estimateur.

Les estimateurs d’états seront considérés dans le cadre de l'estimation optimale. Ainsi, un estimateur est défini comme l'ensemble des arguments minimisants d'une fonction coût. Cette fonction coût sert à discriminer toutes les trajectoires que l'état du système peut emprunter sur un horizon de temps donné. L'estimateur retourne ensuite les meilleures trajectoires au regard de cette fonction coût.

Une première question abordée est celle du choix de la fonction coût. Un état de l'art nous a permis d’isoler deux types d'estimateurs optimaux intéressants. D'une part, les estimateurs dérivés des méthodes d'acquisition compressée, dont les fonctions coûts mettent en œuvre des normes. D'autre part, les estimateurs issus du cadre du critère de correntropie maximale (MCC), définis par des fonctions coûts qui saturent via la présence de termes exponentiels avec un argument négatif.

Basées sur ces deux types d’estimateurs, nous définissons alors deux classes d’estimateurs optimaux, pour lesquelles les fonctions coûts des estimateurs qui les composent sont définies par un ensemble de propriétés et non par une expression algébrique précise.

L'analyse de la résilience stricte ou approchée de ces estimateurs est ensuite effectuée. Les principaux résultats théoriques obtenus dans cette thèse sont des bornes sur la norme de l'erreur d'estimation. L'existence de ces bornes est garantie par des conditions nécessaires portant sur l'observabilité des systèmes considérés, les propriétés de la fonction coût de l'estimateur, ainsi que sur le nombre d'occurrences du bruit impulsif. Ces bornes ont un intérêt double : elles ne dépendent pas des valeurs extrêmes prises par le bruit impulsif, et s'expriment explicitement en fonction des paramètres du système et de l'estimateur. Ce dernier point permet d'analyser l'impact de ces paramètres sur la qualité de l'estimation.

Pour finir, l'implémentation des estimateurs d'état définis dans cette thèse est traitée. Certains d'entre eux peuvent être implémentés directement via des algorithmes d'optimisation convexe du fait que leur fonction coût associée est convexe. Nous avons également développé des algorithmes implémentant une version approchée de certains estimateurs définis par des fonctions coûts non convexes. Enfin, des algorithmes récursifs, semblables à des filtres de Kalman, ont été proposés via le cadre du Forward Dynamic Programming.

Les performances de l'ensemble de ces algorithmes ont par ailleurs été étudiées, notamment par le biais de quatre cas d'application. Ces cas, tirés de problématiques d'ingénierie réelles, montrent la polyvalence du cadre d'estimation développé.

**Mots-clés :** Estimation d'état résiliente, Estimation d'état sécurisée, Estimation d'état optimale, Estimateur récursif, Forward Dynamic Programming, Bruit impulsif, Système cyber-physique, Maximum Correntropy Criterion.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Design and Analysis of Resilient state estimators for Linear Discrete-time Systems***

by **Alexandre Kircher**

**Abstract:**

Given the role of state space representations in engineering methods linked with the control of systems, it is important to know the state of a system. However, there are systems for which the state is not directly accessible through measurement. The *state estimation problem* then consists in reconstructing the state of the system through the model of the system and accessible system measurement without knowing the exact values of the disturbances which can be present in the system.

In this PhD work, we aim at designing and analysing state estimators able to reconstruct the state of a system despite the presence of *impulsive noises*. This type of noise is characterised by having most of its entries equal to zero, but its nonzero entries can take arbitrarily large values. To do so, we will assess if the estimators verify the *resilience property*, which characterises an estimator whose performances are insensitive to a given class of disturbances. We will also investigate the *approximate resilience property*, a weaker version of resilience characterising when a given class of disturbances, potentially unbounded, have a bounded impact on the performances of the estimator.

Every estimator considered in this manuscript will be defined through the *optimal estimation framework*. An optimal estimator will be defined through the minimisation of a given cost function. The role of this cost function is to weight every hypothetical trajectory that the system state can potentially take. The estimator then returns the best state trajectories with respect to this cost function.

The choice of the cost functions is the first problem addressed in this manuscript. After reviewing the state of the art, we focus our attention on two interesting types of optimal state estimators. The estimators originating from the compressed sensing methods, which use norms in their cost function, form the first type. The second type refers to estimators deriving from the Maximum Correntropy Criterion (MCC) framework. These estimators are defined through cost functions presenting saturation due to the presence of exponential terms with negative arguments in their expression.

In order for the analysis to cover many estimators, the elements of these classes were defined through their properties, and not through a specific closed-form algebraic expression.

These classes were then analysed. The main theoretical results obtained in this PhD work are upper bounds on the norm of the estimation error, *i.e.* the difference between the real trajectory and the estimated trajectory. The existence of these bounds is guaranteed through sufficient conditions linked to the observability of the system, to properties verified by the cost function and to the number of nonzero entries in the impulsive noises. Moreover, these bounds have two main advantages. First of all, they do not depend on the extreme values taken by the impulsive noises. Secondly, they are explicitly expressed with the help of the different parameters of the estimators. This allows us to discuss how these parameters impact the quality of the estimation.

Finally, we will deal with the implementation of the estimators defined in this thesis. In the case where the estimator is defined through a convex cost function, it can be directly implemented through an algorithm using convex optimisation methods. We also derived several algorithms in order to approximately implement estimators defined through non convex cost function with exponential losses. In addition, we considered the recursive implementation of our estimators and derived Kalman-like recursive algorithms by applying the Forward Dynamic Programming (FDP) framework.

The performances of all the algorithms defined were assessed in simulation. In particular, we displayed four typical cases of applications. These cases, linked to actual engineering problems, aim at showcasing the versatility of the frameworks we developed.

**Keywords:** Resilient State Estimation, Secured State Estimation, Optimal estimation, Recursive estimator, Forward Dynamic Programming, Impulsive noise, Sparse noise, Cyber-Physical Systems, Maximum Correntropy Criterion.