**Performance validation of MEMS Gyroscopes**

**using Uncertain and Time-Varying Models**

**Abstract**

**MEMS gyroscopes** are micro sensors that measure the angular rate of an object with respect to a frame of reference, by estimating the Coriolis force. The estimation is obtained thanks to the feedback control of the poorly damped spring-mass system oscillations coupled to **synchronous demodulation**. In addition to attractive advantages (size, weight, low power consumption and low cost), they suffers of manufacturing dispersion and an important sensitivity to temperature changes. The controllers are designed using strongly simplified models, without a certified performance level. The actual performance of the MEMS is then evaluated through experiments. This PhD work focuses on the **pre-experimental performance validation** of the designed control, using models that are more realistic, that is a dynamical system analysis problem.

Due to synchronous demodulation, the system is modeled as linear system with Harmonically Time-Varying (HTV) parameters, i.e. parameters that are sinusoidal functions of the time. We address **the analysis of Linear Harmonically Time-Varying (LHTV) systems** by adopting an **Integral Quadratic Constraints (IQC)** approach. A key step to apply the IQC framework is to characterize HTV parameters by IQCs defined by a set of functions named multipliers. The proper choice of a set of multipliers is crucial with respect to the conservatism of the analysis results. A well-documented case in the literature is the so-called D-G scalings for parametric uncertainties. The D scaling was extended to the HTV case. In this PhD thesis, we investigate the introduction of the G scaling to the HTV case since it dramatically reduces the conservatism in the case of parametric uncertainties.

Commercialized MEMS gyroscope must verify accuracy and output noise specifications, defined by standards. We propose **model-based performance criteria** in order to evaluate these specifications. The most important accuracy specification is the **ScaleFactorNonlinearity (SFNL),** defined as the maximal gyroscope measurement error for all the measured angular rates. By expressing it as a robust optimization problem, the computation of the SFNL is recast as a convex optimization problem. The proposed approach is validated using experimental results.

The standard procedure to evaluate the output noise of MEMS gyroscopes is the**Allan variance** which is a time-domain statistical tool computed from long-term measures of the gyroscope output. This method allows to classify and quantify the different stochastic processes that are contained in the gyroscope output noise. In order to derive a model-based computation of the Allan variance, we adopt a generator filter approach, which is to our best knowledge original. Different cases are investigated, from LTI models to classes of LHTV models that are relevant for the MEMS gyroscope application, including uncertainties. Convex optimization problems are obtained using e.g. the IQC approach developed for HLTV systems. The proposed approach is validated using experimental results.

Finally, the proposed systems analysis tools are applied to the **validation of alternative control strategies** that require more complex architectures than the classical LTI control.

**Key words:** MEMS gyroscopes, model-based performance validation, system analysis, robustness, harmonically time-varying systems, integral quadratic constraints, scale factor nonlinearity, Allan variance.

**Validation des performances des gyroscopes MEMS en utilisant des modèles incertains et temps-variant**

**Résumé**

Les **gyroscopes MEMS** sont des micro-capteurs qui mesurent la vitesse angulaire d'un objet par rapport à un référentiel, en estimant la force de Coriolis. L'estimation est obtenue grâce à la commande en boucle fermée des oscillations mal amorties du système ressort-masse couplé à un **démodulateur synchrone**. En plus d'avantages intéressants (taille, poids, faible consommation d'énergie et faible coût), ils souffrent d'une dispersion de fabrication et d'une sensibilité importante aux changements de température. Les correcteurs sont conçus à partir de modèles fortement simplifiés, sans un niveau de performance certifié. Les performances réelles des MEMS sont ensuite évaluées par des expériences. Ce travail de thèse se concentre sur la **validation pré-expérimentale des performances** du système de commande conçu, en utilisant des modèles plus réalistes, c'est-à-dire, il s’agit d’un problème d'analyse des systèmes dynamiques.

En raison de la démodulation synchrone, le système est modélisé comme un système linéaire avec des paramètres variant dans le temps de façon harmonique (HTV), c'est-à-dire des paramètres qui sont des fonctions sinusoïdales du temps. Nous abordons **l'analyse des systèmes LHTV (linéaires et temps-variant harmonique)** en adoptant une approche de type **IQC (contraintes quadratiques intégrales).** Une étape clé pour appliquer le cadre IQC est de caractériser les paramètres HTV par des IQC définies par un ensemble de fonctions appelées multiplieurs. Le choix approprié d'un ensemble de multiplieurs est crucial en ce qui concerne le conservatisme des résultats de l'analyse. Un cas bien documenté dans la littérature est celui des *D-G scalings* pour des incertitudes paramétriques. Le *D scaling* a été étendue au cas HTV. Dans cette thèse, nous étudions l'introduction du *G scaling* au cas HTV, car elle réduit considérablement le conservatisme dans le cas d'incertitudes paramétriques.

Un gyroscope MEMS commercialisé doit vérifier des spécifications de précision et de bruit de sortie, définies par des normes. Nous proposons des **critères de performance basés sur des modèles** afin d'évaluer ces spécifications. La spécification de précision la plus importante est la **non-linéarité du facteur d'échelle (SFNL)**, définie comme l'erreur maximale de mesure du gyroscope pour toutes les vitesses angulaires mesurées. En l'exprimant comme un problème d'optimisation robuste, le calcul de la SFNL est refondu en un problème d'optimisation convexe. L'approche proposée est validée par des résultats expérimentaux.

La procédure standard pour évaluer le bruit de sortie des gyroscopes MEMS est la **variance d'Allan** qui est un outil statistique dans le domaine temporel calculé à partir de longues mesures de la sortie du gyroscope. Cette méthode permet de classer et de quantifier les différents processus stochastiques qui sont contenus dans le bruit de sortie du gyroscope. Afin de dériver un calcul de la variance d'Allan basé sur un modèle, nous adoptons une approche de filtre générateur, qui est à notre connaissance originale. Différents cas sont étudiés, des modèles LTI aux classes de modèles LHTV qui sont pertinents pour l'application aux gyroscopes MEMS, y compris les incertitudes. Les problèmes d'optimisation convexe sont obtenus en utilisant, par exemple, l'approche IQC développée pour les systèmes LHTV. L'approche proposée est validée par des résultats expérimentaux.

Enfin, les outils d'analyse de systèmes proposés sont appliqués à la **validation de stratégies de commande alternatives** qui nécessitent des architectures plus complexes que la commande LTI classique.

**Mots clés :** Gyroscopes MEMS, validation des performances basée sur un modèle, analyse des systèmes, robustesse, systèmes temps-variant harmonique, contraintes quadratiques intégrales, non-linéarité du facteur d'échelle, variance d'Allan.